Quelques notions de Traitement du Signal

Notion de Signal

L'évolution de nombreux phénomènes se déroule à la fois dans le temps et dans l'espace ;

- si l'on s'intéresse à l'évolution dans le temps en un point particulier on parle de signal
- si l'on s'intéresse à l'évolution dans l'espace à un instant précis on parle d'image

Considérons par exemple la propagation de l'onde provoquée par le jet d'une pierre dans un plan d'eau :

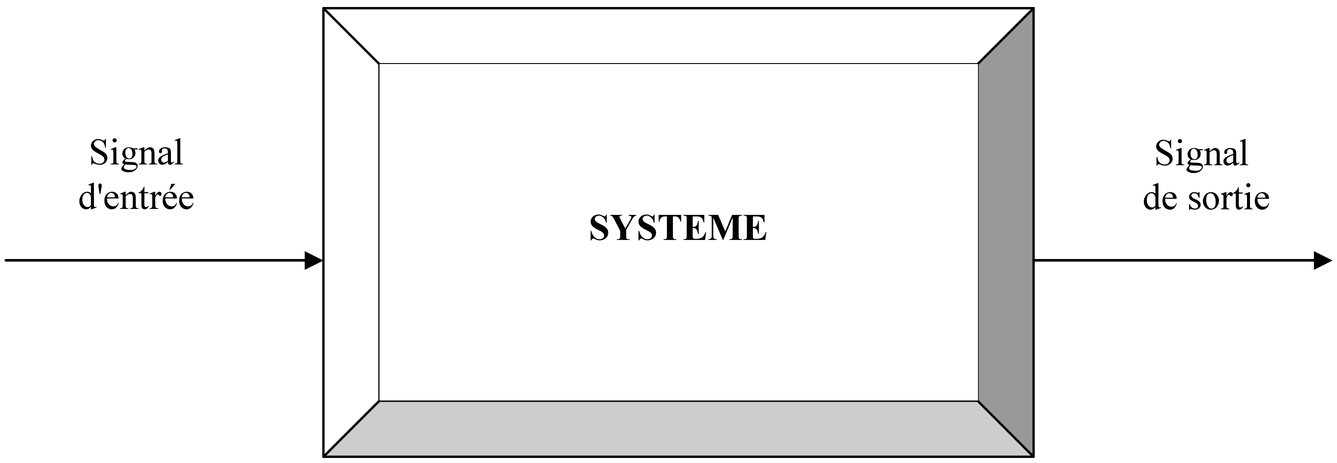
- si nous photographions le plan d'eau, nous obtenons une image de l'onde
- si nous nous intéressons à la profondeur en un point donné, nous sommes confrontés à l'étude d'un signal

En résumé ...

- Pour le physicien, un signal est une quantité physique mesurable qui évolue en fonction d'une ou plusieurs variables (variables d'espace et temps le plus souvent).
- Pour le mathématicien, un signal est une fonction de plusieurs variables (de $\mathbb{R}^n$) à valeurs multidimensionnelles (dans $\mathbb{R}^p$). Ce qui signifie qu'un signal est un élément de $\mathcal{F}_{(n,p)}$ (ensemble des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$)

Notion de système

- Pour le physicien, un système est une entité physique qui réalise une opération sur un signal.
- Pour le mathématicien, un système est une application de $\mathcal{F}_{(n,p)}$ dans $\mathcal{F}_{(n,q)}$
- Un système admet donc un signal d'entrée et un un signal de sortie (transformée du signal d'entrée par le système)



Exemples

- l'oreille humaine est un système qui transforme une variation de pression (acoustique) en un signal électrique (sur le nerf auditif)
- un microphone est un système analogue à l'oreille, de même que les cordes vocales et les enceintes acoustiques.
- en traitement d'image, les logiciels modernes nous offres de multiples filtres, qui sont des cas particuliers de systèmes :
  - amplification ou diminution du contraste
  - réglage de la luminosité
  - saturation des couleurs
  - etc...

Traitement du signal

- Théorie permettant d'effectuer une description (une modélisation) des signaux et des sytèmes.
- Le traitement du signal a pour objectif la réalisation et l'interprétation des signaux porteurs d'information
  - transmission des signaux sonores (musique, parole)
  - réception de ces signaux et restitution du signal d'origine (déformé lors de la transmission - modulation de fréquence)
  - analyse d'une image pour - par exemple - déterminer les contours ou compter le nombre d'éléments d'un certain type présents sur cette image.

Classification des signaux

Un signal peut être classé selon différents critères :

- sa dimensionnalité
- ses caractéristiques temporelles
- les valeurs qu'il peut prendre
- sa prédictibilité

Dimensionnalité

On distingue les dimensions de l'espace de départ et celles de l'ensemble d'arrivée.

Lorsqu'on s'intéresse aux valeurs prises par le signal on distingue :

- signal scalaire ou monocal lorsqu'il prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou éventuellement dans $\mathbb{C}$)
- signal vectoriel ou multicanal lorsqu'il prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^n$ (ou éventuellement $\mathbb{C}^n$)

Lorsqu'on s'intéresse au domaine de définition du signal on distingue :

- signal mono-dimensionnel qui correspond à des fonctions d'une seule variable
- signal multi-dimensionnel qui correspond à des fonctions de plusieurs variables réelles

Exemples

- Un signal de télévision prend trois valeurs (RVB) correspondant aux trois couleurs (rouge - vert -bleu) qui dépendent du temps et des coordonnées (x, y) d'un point. Il s'agit donc d'un signal
  - tri-dimensionnel : le temps et des coordonnées d'espace
  - multicanal : les trois couleurs
- L'intensité du courant traversant un circuit électrique est un signal
  - mono-dimensionnel : le temps
  - mono-canal : l'intensité en ampères

Caractéristiques temporelles

On distingue les signaux

- à temps continu ou analogiques lorsque le temps prend ses valeurs dans $\mathbb{R}$
- à temps discret ou numériques lorsque la grandeur évolue uniquement à des instants discrets t_n où $n \in \mathbb{Z}$;

- En réalité peu de phénomènes sont véritablement à temps discret, par contre toute mesure effectuée sur une grandeur continue (opération de numérisation) la transforme en signal à temps discret .
- Le passage analogique - numérique implique une perte d'information ; l'un des objets du traitement du signal consiste à minimiser cette perte.

Numérisation

- Dans la réalité, les signaux sont pratiquement toujours analogiques.
- Cependant, de nos jours, les signaux sont le plus souvent numérisés, i.e. transformés en signaux numériques par un échantillonnage suivi d'une quantification à l'aide d'un CAN (convertisseur analogique numérique), et ce pour diverses raisons
  - facilité de stockage de l'information
  - facilité de transformation (systèmes numériques plus souples et plus faciles à réaliser)
- les signaux numériques, pour pouvoir être interprétés par les capteurs humains (yeux, oreilles, ...) sont transformés en signaux analogiques par des CNA (convertiseurs numériques analogiques)

Signal causal

- Un signal numérique est dit causal lorsqu'il est nul pour $n < 0$.
  Un signal numérique causal correspond donc à une suite numérique
- Un signal analogique s est dit causal si $t < 0 \Longrightarrow s(t) = 0$.
  En pratique un signal temporel est toujours causal, à condition de bien choisir l'origine des temps.

Prédictibilité

Un signal est dit

- déterministe s'il est possible de prédire la valeur du signal (i.e. de la grandeur qui constitue le signal) à tout instant t
- aléatoire si cette prédiction est impossible avec certitude, mais si l'on peut supposer que le signal est distribué suivant une certaine loi de probabilité.

Par exemple

- un oscillateur sinusoïdal d'amplitude A et de fréquence f_0 est déterministe : nous savons alors que l'état à l'instant t est donnée par $A\cos(2\pi f_0 t)$.
- la tension engendrée à la sortie d'un microphone, le courant produit par l'agitation (thermique) des particules dans un conducteur sont des signaux aléatoires.

Quelques signaux numériques

Impulsions de Dirac

- On appelle impulsion unité ou impulsion de Dirac le signal noté δ défini par

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- On appelle impulsion unité retardé ou impulsion de Dirac retardée le signal noté δ_k défini par

$$\delta_k(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n = k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Signe - Porte

- On appelle signal signe numérique le signal défini par

$$sgn(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

En fait la valeur en 0 peut varier selon les auteurs ; nous avons pris 1, d'autres auteurs prennent 0.

- On appelle signal porte tout signal défini par

$$\Pi_T(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } -T/2 \leq n \leq T/2 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Echelon- rampe - signal exponentiel

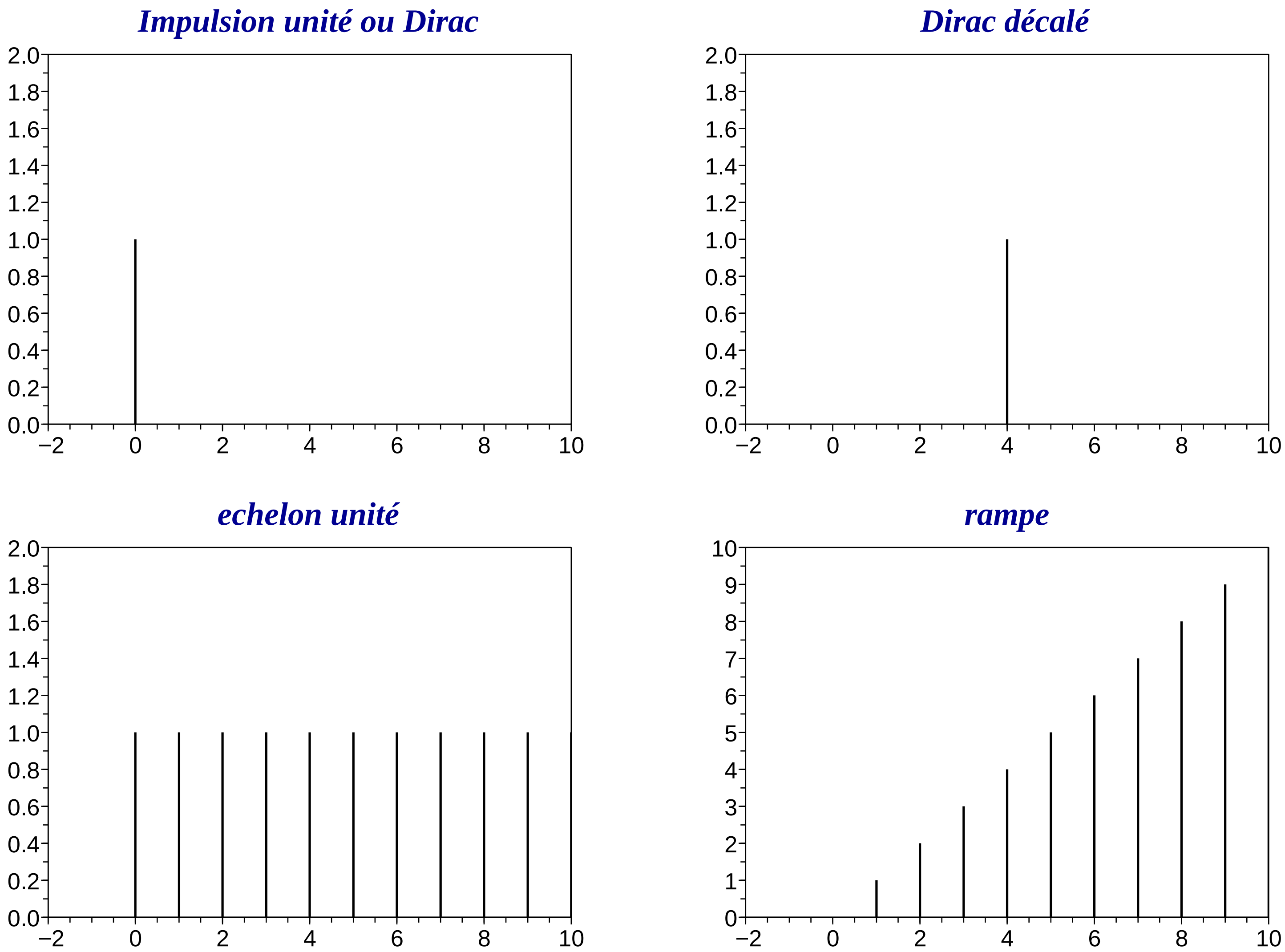
- On appelle échelon unité le signal noté u défini par

$$u(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- On appelle rampe le signal noté r défini par

$$r(n) = \begin{cases} n \text{ si } n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- On appelle signal exponentiel le signal défini par $x(n) = a^n u(n)$


Impulsion unité ou Dirac
Dirac décalé
echelon unité
rampe

Quelques signaux analogiques

Fonction de Heaviside

- On appelle fonction de Heaviside ou encore fonction échelon unité la fonction notée U (ou parfois H) définie par

$$U(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$$

- La fonction de Heaviside sert à «fabriquer» des fonctions causales : en effet si f est une fonction numérique quelconque définie sur $\mathbb{R}$, alors $f \times U$ est une fonction causale.

Echelon retardé, rampe

- On appelle fonctions échelon retardé les fonctions U_α définies par

$$U_\alpha(t) = U(t-\alpha)$$

- On appelle rampe la fonction r définie par

$$r(t) = t\,U(t)$$

Fonctions Porte et exponentielles

- On appelle fonctions porte ou fenêtres rectangulaires les fonctions notées Π_T ou $Rect_T$ définies par

$$\Pi_T(t) = Rect_T(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t \in [-T/2\,,\, T/2] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

- On appelle décroissance exponentielle les fonctions

$$e^{-\alpha t} U(t) \text{ avec } \alpha > 0$$

- On appelle approche exponentielle les fonctions

$$\left(1 - e^{-\alpha t}\right) U(t) \text{ avec } \alpha > 0$$

Signe - fenêtre triangulaire

- On appelle fonction signe la fonction définie par

$$sgn(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \geq 0 \\ -1 \text{ sinon} \end{cases}$$

On considère aussi parfois que $sgn(0) = 0$

- On appelle fenêtres triangulaires ou fenêtres de Barlett les fonctions définies par

$$tri_T(t) = \begin{cases} 1 - \frac{2}{T}|t| \text{ si } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Sinus cardinal

- On appelle fonction sinus cardinal la fonction définie par

$$\mathrm{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$$

et, par convention, $\mathrm{sinc}(0) = 1$

- cette fonction est paire et nulle pour les valeurs entières de la variable.
- Nous admettrons que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}\, t \; dt = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2\, t \; dt = 1$$

Energie et puissance d'un signal

Energie d'un signal numérique

Dans le cas d'un signal numérique causal, on définit

- l'énergie d'un signal numérique causal (x_n) par $E = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$ (sous réserve donc de la convergence de cette série !)
- la puissance moyenne d'un signal numérique causal (x_n) par $P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2$
- si l'énergie est finie, alors le signal est dit d'énergie finie et alors $P = 0$
- si P est fini non nul, le signal est dit de puissance finie

Si le signal n'est pas causal, son énergie est définie par

$$E = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_{-n}|^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2$$

sous réserve donc de la convergence de chacune de ces séries.

Sa puissance est définie par

$$P = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x_n|^2$$

Energie d'un signal temporel analogique

On définit

- l'énergie d'un signal analogique $x(t)$ par

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt$$

(sous réserve donc de la convergence de cette intégrale !)

- la puissance moyenne d'un signal analogique $x(t)$ par

$$P = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{t=-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 \, dt = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{t=-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt$$

Cas d'un signal périodique

- Si le signal temporel s est T-périodique, i.e. si $s(t+T) = s(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$, alors sa puissance moyenne est égale à

$$\frac{1}{T}\int_0^T |s(t)|^2 dt$$

- Si le signal numérique s est p périodique, i.e. si $s(n+p) = s(n) \forall n \in \mathbb{N}$, alors sa puissance moyenne est égale à

$$\frac{1}{p}\sum_{n=0}^{p} |s(n)|^2$$

Signaux à durée finie

- Un signal est dit à durée finie s'il est nul en dehors d'un intervalle borné.
- Un tel signal est également dit à support fini
- Les signaux à durée finie sont à énergie finie.

Convolution

Produit de convolution analogique

Etant donné deux signaux analogiques u et v, on appelle produit de convolution de u et de v et on note $u*v$ le signal défini par

$$\boxed{u * v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t-x)\, v(x)\; dx}$$

sous réserve de convergence de l'intégrale

Produit de convolution numérique

Etant donné deux signaux numériques u et v, on appelle produit de convolution de u et de v et on note $u*v$ le signal défini par

$$\boxed{u * v(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)v(n-k)}$$

sous réserve de convergence de la série

Cas des signaux causaux

Si les signaux sont causaux, la convolution est causale et

- dans le cas analogique :

$$\boxed{f * g(t) = \int_0^t f(t-x)\, g(x)\, dx}$$

- dans le cas numérique :

$$\boxed{u * v(n) = \sum_{k=0}^{n} u(n-k)\, v(k)}$$

Cas des signaux périodiques

Pour deux signaux x et y périodiques, de même période T, on définit la convolution par

$$\boxed{x * y(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(u)\, y(t-u)\, du}$$

Propriétés de la convolution

Le produit de convolution est

- commutatif : $u * v = v * u$
- associatif : $u * (v * w) = (u * v) * w$
- distributif par rapport à l'addition : $u * (v + w) = u * v + u * w$
- admet un élément neutre qui est l'impulsion de Dirac : pour tout signal s $\delta * s = s * \delta = s$

Corrélation

Intercorrélation : énergie finie

u et v étant deux signaux à énergie finie, on définit l'intercorrélation de ces signaux par

- $$\boxed{C_{uv}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\overline{v}(x-t)\;dx}$$
  dans le cas de signaux temporels
- $$\boxed{C_{uv}(n) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u(k)\,\overline{v}(k-n)}$$
  dans le cas numérique.

Intercorrélation : puissance finie

u et v étant deux signaux à puissance finie, on définit l'intercorrélation de ces signaux par

- $$C_{uv}(t) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(x)\,\overline{v}(x-t)\,dx$$

  dans le cas de signaux temporels

- $$C_{uv}(n) = \lim_{N \to +\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{k=-N}^{+N} u(k)\,\overline{v}(k-n)$$

  dans le cas numérique.

Autocorrélation

On appelle autocorrélation d'un signal son intercorrélation avec lui-même :

$$C_u = C_{uu}$$

Outils mathématiques

Etude à suivre ...

- signaux analogiques périodiques : séries de Fourier
- signaux analogiques causaux : Transformée de Laplace
- signaux analogiques : Transformée de Fourier
- signaux numériques Transformée en Z
- filtrage numérique et analogique