Thème : – Séries numériques

Exercice 1

Soit φ une fonction numérique définie sur $[n_0, +\infty[$ et (u_n) la série définie par $u_n = \varphi(n+1) - \varphi(n)$.

1. Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \varphi(n+1) - \varphi(n_0)$.
2. En déduire que la série (u_n) converge si φ admet une limite finie en $+\infty$; cette condition est-elle nécessaire ?
3. Montrer que $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) = \ln\dfrac{n+1}{n} - \ln\dfrac{n}{n-1}$. En déduire la somme de la série de terme général $\ln\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$
4. Montrer que $\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1} = \arctan\dfrac{1}{n} - \arctan\dfrac{1}{n+1}$. En déduire la somme de la série de terme général $\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$.

Exercice 2

Soit $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$. Décomposer u_n en éléments simples et en déduire la convergence et la somme de la série (u_n).

Mêmes questions pour les séries de terme général

$$\frac{1}{n(n+1)}\ ;\ \frac{-2}{(2n+5)(2n+3)}\ ;\ \frac{1}{4n^2-1}\ ;\ \frac{-1}{9n^2+3n-2}\ ;\ \frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

Exercice 3

Soit $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$ et $u_n = \ln\cos\dfrac{x}{2^n}$.

1. Montrer que u_n est défini pour tout entier n
2. Soit $\varphi(n) = \ln\sin\dfrac{x}{2^n}$. Montrer que $\forall n \geq 1,\ u_n = \varphi(n-1) - \varphi(n) - \ln 2$
3. Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. Montrer que $S_n = -\ln\left(2^n \sin\dfrac{x}{2^n}\right)$
4. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 2^n \sin\frac{x}{2^n} = x$.
5. En déduire que la série (u_n) converge et déterminer sa somme.

Exercice 4

Soit $u_n = 2\,n\,\ln\dfrac{n-1}{n}$ et $v_n = \dfrac{2n-1}{n-1}$

1. Déterminer le domaine de définition des suites u et v.
2. Etudier les limites des suites u et v
3. Etudier la convergence des séries (u_n) et (v_n).
4. Soit $w_n = u_n + v_n$. On admettra que $u_n \sim \dfrac{1}{3n^2}$; en déduire la nature de la série (w_n).

Exercice 5

Discuter la convergence des séries (a_n) avec a_n :

$$\frac{1}{n+4}\ ;\ \frac{n^2}{2^n}\ ;\ \frac{2^n}{(2n)!}\ ;\ \frac{\ln n}{n^3}\ ;\ \frac{1}{4^n\sqrt{n}}\ ;\ \frac{1}{\ln(n+1)}\ ;\ \frac{n}{n^2+1}\ ;\ \frac{n!}{100}\ ;\ \frac{1}{n\,2^n}\ ;\ \frac{1}{n^n}$$

$$\frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}\ ;\ \frac{(n+\frac{1}{n})n!}{\sqrt{(2n)!}}\ ;\ \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$$

Exercice 6

Etudier la convergence des séries de terme général :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{n^\alpha}}\ ;\ \left(a+\frac{1}{n}\right)^n\ ;\ n\,e^{-n}\ ;\ \frac{1}{3+2n}\ ;\ \frac{1}{4n+7}\ ;\ \frac{n}{n^2+1}\ \ \frac{\arctan n}{1+n^2}\ ;\ \frac{\ln n}{n}\ ;\ \ ;\ \frac{1}{n^4+n^2+1}$$

$$\frac{1}{n3^n}\ ;\ \frac{2+\cos n}{n^2}\ ;\ \frac{1}{n^n}\ ;\ \frac{\arctan n}{n}\ :\ \frac{1}{n!}\ ;\ \frac{\sqrt{n}}{n+4}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}\ ;\ \frac{3n+5}{n\,2^n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}+9}\ ;\ \frac{3n+1}{2^n}$$

$$\frac{3^n}{n^2+4}\ ;\ \frac{100^n}{n!}\ ;\ \frac{n!}{e^n}\ ;\ \frac{n!}{(n+1)^5}\ ;\ \frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}\ ;\ \frac{2^n}{n^2}\ ;\ \frac{n}{3^n}\ ;\ \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\ ;\ \frac{5^{n+1}}{(\ln n)^n}$$

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-2n-1}\right)\ ;\ \frac{n!}{n^n}\ ;\ \cos\frac{1}{n}\ ;\ \frac{n^2+n-2}{n^4-4n}\ ;\ \frac{n^\alpha}{a^n}\ ;\ \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$$

Exercice 7

Etudier la convergence des séries de terme général :

$$(-1)^n\frac{1}{n^2+7}\ :\ (-1)^{n-1}n\,5^{-n}\ ;\ (-1)^n(1+e^{-n})\ ;\ (-1)^n\frac{e^{2n}+1}{e^{2n}-1}\ ;\ (-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\ ;\ (-1)^{n-1}n^{-2/3}$$

$$(-1)^{n-1}\frac{1}{\ln(n+1)}\ ;\ (-1)^n\frac{n}{\ln n}\ ;\ \frac{(-10)^n}{n!}\ ;\ \frac{\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+4}}\ ;\ (-1)^n n\sin\frac{1}{n}\ ;\ (-1)^n\frac{2^{1/n}}{n!}\ ;\ (-1)^n\frac{\arctan n}{n^n}$$

$$(-1)^n\frac{n+1}{n}\ ;\ \frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\ ;\ \frac{(-1)^n}{n-\ln n}\ ;\ (-1)^n\sin\frac{1}{n}$$

Exercice 8

Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $1-\cos\frac{1}{n}$
2. $\dfrac{n!}{n^n}$
3. $(-1)^n\sin\dfrac{1}{n}$