# SERIES NUMERIQUES
# Notes de Cours

Roger NOEL

30 août 2006

## 1 Généralités

Suites et séries numériques sont deux aspects d'un même objet. Ce qui signifie que quant à leur nature, suites et séries sont identiques : il s'agit de fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Ce n'est que l'objet de leur étude qui les différencie.

Etudier la suite $(u_n)$, c'est étudier la limite de $u_n$ en $+\infty$ et éventuellement la monotonie de la suite. Par contre :

**Définition 1**

- *Etant donné une suite $(u_n)$, étudier la série $(u_n)$, c'est étudier la convergence de la suite* $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k$
- *Une série $(u_n)$ est dite convergente si la suite $(S_n)$ associée admet une limite finie ; elle est dite divergente dans tous les autres cas.*
- *La limite de la suite $(S_n)$ associée à $(u_n)$ est appelée somme de la série et notée* $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$

**Exemple 1**

> *Etudier la convergence de la série $u_n = a^n$ en fonction de la valeur du paramètre $a$ et déterminer la somme de cette série lorsqu'elle existe*

Il suffit de se reporter au cours sur les suites géométriques pour conclure que la série «géométrique» $a^n$ converge si et seulement si $a \in ]-1\,,\,1[$ et qu'alors la somme de la série est

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$$

**Proposition 1** *Si la suite $(u_n)$ ne tend pas vers 0, alors la série $(u_n)$ diverge (la réciproque est fausse)*

**Exemple 2**

> *On considère la suite $u$ définie par $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite $u$ et de la série $u$*

- Il est clair que $\lim u_n = 1$ ; la suite $u$ converge donc vers 1

- Comme $u$ ne tend pas vers 0, la série $u$ diverge

**Exemple 3**

> *On considère la suite $u$ définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Etudier la convergence de la suite $u$ et de la série $u$*

- Il est clair que $\lim u_n = 0$ ; la suite $u$ converge donc vers 0
- Comme $u$ tend vers 0, la proposition précédente ne nous permet de conclure ni à la convergence ni à la divergence de la série $u$ !

**Exemple 4**

> *Soit $\varphi$ une fonction numérique définie sur $[n_0, +\infty[$ et $(u_n)$ la série définie par $u_n = \varphi(n+1) - \varphi(n)$.*
>
> - *Montrer que $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \varphi(n+1) - \varphi(n_0)$.*
> - *En déduire que la série $(u_n)$ converge si $\varphi$ admet une limite finie en $+\infty$ ; cette condition est-elle nécessaire ?*
> - *Déterminer la somme des séries de terme général* $\ln\left((1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $\ln\left(\cos\dfrac{x}{2^n}\right)$ *et* $\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$.
>
>   *(on pourra remarquer que* $\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1} = \arctan\dfrac{1}{n} - \arctan\dfrac{1}{n+1}$*)*

**Exercice 1**

Soit $u_n = \dfrac{1}{n(n-1)}$. Décomposer $u_n$ en éléments simples en en déduire la convergence et la somme de la série $(u_n)$.

**Proposition 2**

- *Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(v_n)_{n \geq n_0}$ sont deux séries convergentes, de somme $S$ et $T$ respectivement ; si $\lambda$ et $\mu$ sont deux scalaires, alors la série $(\lambda\, u_n + \mu\, v_n)_{n \geq n_0}$ est convergente et sa somme est égale à $\lambda\, S + \mu\, T$.*
- *Si la série $(u_n)_{n \geq n_0}$ converge et si la série $(v_n)_{n \geq n_0}$ diverge, alors la série $(u_n + v_n)_{n \geq n_0}$ diverge.*
  *Par contre nous ne pouvons rien affirmer quant à la nature de la somme de deux séries divergentes, qui peut très bien converger ou diverger.*

**Proposition 3** *Les séries $(u_n)_{n \geq n_0}$ et $(u_n)_{n \geq n_1}$ sont de même nature, i.e. elles convergent ou divergent simultanément.*

**démonstration**

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=n_1}^{n} u_k$. Supposons $n_1 \geq n_0$. Alors $S_n = T_n + \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n_1-1} u_k$. Les deux suites $S$ et $T$ diffèrent donc d'une constante, et sont par conséquent de même nature.

**Remarque**

En dehors de certaines séries particulières, nous ne savons par déterminer la somme d'une série. Cependant un calculateur pourra toujours nous en donner une valeur approchée, sous réserve que nous ayons montré la convergence de la série, i.e. l'existence de sa somme. La plus grande partie de ce cours consistera donc à établir des *critères de convergence*.

## 2 Séries à termes positifs

**Définition 2**

- *Une série* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est dite* **à termes positifs** *si* $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq 0$.
- *Une série* $(u_n)$ *est dite* à termes positifs à partir d'un certain rang *si*

$$\exists n_1 \geq n_0 \ / \ n \geq n_1 \Longrightarrow u_n \geq 0$$

**Remarque**

D'après la proposition précédente les critères applicables aux séries à termes positifs le sont donc également aux séries à termes positifs à partir d'un certain rang, quitte à remplacer $n_0$ par $n_1$.

**Proposition 4 : Critère de comparaison**
*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *deux séries à termes positifs telles que* $0 \leq u_n \leq v_n$. *Alors*

- *si la série* $(v_n)$ *converge, la série* $(u_n)$ *converge*
- *si la série* $(u_n)$ *diverge, la série* $(v_n)$ *diverge*

**Remarque**

Ce critère est essentiellement technique, en ce sens qu'il sert à démontrer les critères suivants. Il peut cependant arriver que nous soyons amenés à l'utiliser pour déterminer la nature d'une série, mais ce sera toujours en dernier recours.

**Proposition 5** *Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une série numérique.*
*Si* $u_n \sim v_n$, *et si la série* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *est à termes positifs (à partir d'un certain rang),*
*alors les séries* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geq n_0}$ *sont de même nature.*

**démonstration**

Si $u_n \sim v_n$, alors $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$

Donc $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 > 0 \ / \ n \geq n_1 \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| < \varepsilon$

Prenons $\varepsilon = 1/2$. Alors $\exists n_1 > 0 \ / \ n \geq n_1 \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| < 1/2$

Donc

$$\begin{aligned} n \geq n_1 &\Longrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} - 1 \leq \frac{1}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{v_n} \leq \frac{3}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{1}{2} v_n \leq u_n \leq \frac{3}{2} v_n \text{ (car } v_n \text{ est positif!)} \end{aligned}$$

Il reste à appliquer le critère de comparaison.

**Remarque**

Les définitions et les résultats sont les mêmes que pour les fonctions dont les suites constituent un cas particulier. Par contre deux suites ne peuvent être équivalentes qu'en $+\infty$. Nous ne préciserons donc plus ce fait et noterons simplement $u_n \sim v_n$.

**Proposition 6 : Critère de d'Alembert**
*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une série à termes positifs telle que* $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$.
*Alors*
- *si* $l < 1$ *la série converge*
- *si* $l > 1$ *la série diverge, son terme général* $u_n$ *ne tendant vers* $0$
- *si* $l = 1$ *on ne peut conclure (la série peut aussi bien converger que diverger).*

**Exemple 5**

*Etudier la convergence de la série* $(u_n)$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n!}$.

- La série est trivialement à termes positifs.
- $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \dfrac{n!}{(n+1)!} = \lim \dfrac{1}{n+1} = 0$.
- Par conséquent la série $\dfrac{1}{n!}$ converge d'après d'Alembert.

**Remarque**

Nous pourrons désormais considérer ce résultat comme acquis.

**Exemple 6**

*Etudier la convergence de la série* $(u_n)$ *définie par* $u_n = \dfrac{1}{n}$.

La série est trivialement à termes positifs, et $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. Le critère de d'Alembert ne nous permet donc pas de conclure ! (il faudra trouver un autre critère !)

**Exemple 7**

*Etudier la convergence de la série* $(u_n)$ *définie par* $u_n = \dfrac{2^n}{n}$.

- La série est trivialement à termes positifs.
- $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim \dfrac{2^{n+1}}{n+1}\dfrac{n}{2^n} = \lim \dfrac{2n}{n+1} = 2$.
- Par conséquent la série diverge d'après d'Alembert.

**Exercice 2**

Etudier la convergence de la série $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{1+n^2}{n!}$

**Exercice 3**

Etudier la convergence de la série $(u_n)$ définie par $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

**Proposition 7 : Critère de Cauchy**
*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une série à termes positifs telle que* $\lim \sqrt[n]{u_n} = l$ *Alors*
- *si* $l < 1$ *la série converge*
- *si* $l > 1$ *,la série diverge, son terme général* $u_n$ *ne tendant vers* $0$
- *si* $l = 1$ *on ne peut conclure (la série peut aussi bien converger que diverger).*

**Exemple 8**

> *Etudier la convergence des séries de terme général*
>
> $$u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \quad et \quad v_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

- $\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \dfrac{n}{n+1} = 1$. Cauchy ne nous permet donc pas de conclure. Par contre $\lim u_n = e^{-1}$ et par conséquent son terme général ne tendant pas vers 0, la série $(u_n)$ est divergente.
- $\lim \sqrt[n]{v_n} = \lim u_n = e^{-1}$ et comme $e^{-1} < 1$, la série $(v_n)$ est convergente d'après Cauchy.

**Exercice 4**

Etudier la convergence des séries de terme général $\dfrac{5^n}{n\,3^{n+1}}$ et $\left(\dfrac{3n}{4n-1}\right)^{2n+1}$

**Proposition 8 : Critère de comparaison série-intégrale**
*Soit $f$ une fonction numérique à valeurs réelles, continue, décroissante et positive sur $[n_0\,,\,+\infty[$ et soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ la série définie par $u_n = f(n)$.*
*Alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ et la série $(u_n)_{n\geq n_0}$ sont de même nature (toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).*

**Remarque**

L'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ est dite convergente si $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_{n_0}^{x} f(t)\,dt$ existe et est finie.

**Exemple 9**

> *Etudier la convergence de la série de terme général*
>
> $$u_n = \frac{1}{n\,\ln n}$$

Considérons la fonction $f$ définie par $f(x) = \dfrac{1}{x\,\ln x}$.

- $f$ est définie et positive sur $[2\,,\,\infty[$.
- $f'(x) = -\dfrac{1+\ln x}{(x\,\ln x)^2}$ est négative sur $[2\,,\,+\infty[$ et donc $f$ est décroissante sur cet intervalle.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Par conséquent $f$ et la série $u$ vérifient les hypothèses du critère de comparaison série-intégrale. Or

$$\int_2^x f(t)\,dt = [\ln\ln t]_2^x = \ln\ln x - \ln\ln 2$$

(on effectue le changement de variable $u = \ln t$)
et comme

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\ln x = +\infty$$

cette intégrale est divergente, ainsi que la série $(u_n)$

**Exercice 5**

Etudier la convergence de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^2}$

**Proposition 9 : Critère de Riemann**
*Soit* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *une série numérique.*
*Si* $u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ *alors la série* $(u_n)$ *converge si et seulement si* $\alpha > 1$

**Exercice 6**
Etudier la convergence des séries de terme général :

- $u_n = 2n \, \ln \dfrac{n-1}{n}$
- $v_n = \dfrac{2n-1}{n-1}$
- $w_n = u_n + v_n$.
- 
  - Calculer $F(t) = \displaystyle\int_2^t \frac{dx}{x\,(\ln x)^2}$ pour $t > 2$.
  - En déduire $\lim\limits_{t \to +\infty} F(t)$.
  - Quelle est la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^2}$ ?

## 3 Séries de Leibniz

**Définition 3** *On appelle* **série alternée** *ou* **série de Leibniz** *toute série numérique réelle* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *telle que*

- $u_n = (-1)^n \, v_n$
- $v_n \geq 0 \; \forall n \geq n_0$
- *la suite* $v$ *est décroissante*
- $\lim v_n = 0$

**Proposition 10** *Toute série de Leibniz* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est convergente et* $|S - S_n| \leq u_{n+1}$ *où* $S$ *désigne la somme de la série et* $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$.
*De plus* $S - S_n$ *est du signe de* $u_{n+1}$

.

**Exercice 7**
Etudier la convergence des séries de terme général :

- $(-1)^n \dfrac{1}{n^2+7}$
- $(-1)^{n-1} n \, 5^{-n}$
- $(-1)^n (1 + e^{-n})$
- $(-1)^n \dfrac{e^{2n}+1}{e^{2n}-1}$
- $(-1)^n \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$
- $(-1)^{n-1} n^{-3}$
- $(-1)^{n-1} \dfrac{1}{\ln(n+1)}$
- $(-1)^n \dfrac{n}{\ln n}$
- $\dfrac{(-10)^n}{n!}$
- $\dfrac{\sin \sqrt{n}}{\sqrt{n^3+4}}$
- $(-1)^n n \sin \dfrac{1}{n}$
- $(-1)^n \dfrac{2^{1/n}}{n!}$

## 4 Convergence absolue et semi-convergence

**Proposition 11**

- *Si la série* $(|u_n|)$ *converge, alors la série* $(u_n)$ *converge également.*
- *On dit alors que la série est* absolument convergente.
- *Cependant une série peut converger sans que la série de ses valeurs absolues converge : une telle série est dite* semi-convergente.

**Remarque**

Pour tout série on étudiera la convergence et la convergence absolue ; une série sera donc annoncée absolument convergente, semi-convergente ou divergente.

**Proposition 12 : Convergence commutative**

- *Si une série* $(u_n)$ *est absolument convergente, alors toute série* $(u_{\varsigma(n)})$*, où* $\varsigma$ *est une bijection de* $\mathbb{N}$ *dans lui-même, est également convergente et converge vers la même somme.*
- *Par contre, si une série* $(u_n)$ *est semi-convergente,*
  - *il existe une bijection* $\varsigma$ *de* $\mathbb{N}$ *dans lui-même telle que la série* $(u_{\varsigma(n)})$ *diverge*
  - *pour tout réel* $A$*, il existe une bijection* $\varsigma$ *de* $\mathbb{N}$ *dans lui-même telle que la série* $(u_{\varsigma(n)})$ *converge vers* $A$

**Proposition 13 : Critère de d'Alembert généralisé**

*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une série telle que* $\lim \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = l$*. Alors*

- *si* $l < 1$*, la série converge*
- *si* $l > 1$*, la série diverge, son terme général* $u_n$ *ne tendant vers* $0$
- *si* $l = 1$*, on ne peut conclure (la série peut aussi bien converger que diverger).*

**Proposition 14 : Critère de Cauchy généralisé**

*Soit* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *une série telle que* $\lim \sqrt[n]{|u_n|} = l$*. Alors*

- *si* $l < 1$*, la série converge*
- *si* $l > 1$*, la série diverge, son terme général* $u_n$ *ne tendant vers* $0$
- *si* $l = 1$*, on ne peut conclure (la série peut aussi bien converger que diverger).*

## 5 Pratique de l'étude de la convergence

1. on cherche un équivalent $v_n$ de $u_n$ (si possible plus simple !)
2. si $v_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, on peut conclure d'après Riemann
3. sinon on applique d'Alembert ou Cauchy généralisé
4. si l'on ne peut conclure, on vérifie le signe de la suite (deux suites équivalentes ont même signe !)
   - si la série est à termes positifs (ou négatifs) on applique le critère de comparaison série-intégrale ou le critère de comparaison
   - si la série est de Leibniz, on applique le théorème du même nom
   - en dernier recours on vérifie si la limite de $u_n$ est nulle

## 6 Exercices

**Exercice 8**
Discuter en fonction de la valeur de $x$ la convergence des séries de terme général $(a_n x^n)$ avec $a_n$ :

$$\frac{1}{n+4}\ ;\ \frac{n^2}{2^n}\ ;\ \frac{2^n}{(2n)!}\ ;\ \frac{\ln n}{n^3}\ ;\ \frac{1}{4^n\sqrt{n}}\ ;\ \frac{1}{\ln(n+1)}\ ;\ \frac{n}{n^2+1}\ ;\ \frac{n!}{100}\ ;\ \frac{1}{(-4)^n}\ ;\ \frac{1}{n\,2^n}\ ;\ \frac{1}{n^n}$$

$$\frac{(2n)!n^{2n}}{2^n n!(3n)!}\ ;\ \frac{(n+\frac{1}{n})n!}{\sqrt{(2n)!}}\ ;\ \left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{n^2}$$

**Exercice 9**
Déterminer l'ensemble des valeurs de $x$ pour lesquelles la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(2^n+3^n)x^n$ converge et déterminer alors sa somme.

**Exercice 10**
Etudier la convergence des séries de terme général :

$$\sqrt[3]{\frac{1}{n^\alpha}}\ ;\ \left(a+\frac{1}{n}\right)^n\ ;\ n\,e^{-n}\ ;\ \frac{1}{3+2n}\ ;\ \frac{1}{4n+7}\ ;\ \frac{n}{n^2+1}\ \ \frac{\arctan n}{1+n^2}\ ;\ \frac{\ln n}{n}\ ;\ ;\ \frac{1}{n^4+n^2+1}$$

$$\frac{1}{n3^n}\ ;\ \frac{2+\cos n}{n^2}\ ;\ \frac{1}{n^n}\ ;\ \frac{\arctan n}{n}\ :\ \frac{1}{n!}\ ;\ \frac{\sqrt{n}}{n+4}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}\ ;\ \frac{3n+5}{n\,2^n}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{n}+9}\ ;\ \frac{3n+1}{2^n}$$

$$\frac{3^n}{n^2+4}\ ;\ \frac{100^n}{n!}\ ;\ \frac{n!}{e^n}\ ;\ \frac{n!}{(n+1)^5}\ ;\ \frac{(\ln n)^n}{n^{n/2}}\ ;\ \frac{2^n}{n^2}\ ;\ \frac{n}{3^n}\ ;\ \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n\ ;\ \frac{5^{n+1}}{(\ln n)^n}$$

$$\frac{1}{n}\left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-2n-1}\right)\ ;\ \frac{n!}{n^n}\ ;\ \cos\frac{1}{n}\ ;\ \frac{n^2+n-2}{n^4-4n}\ ;\ \frac{n^\alpha}{a^n}\ ;\ \left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^n$$

**Exercice 11**
En décomposant la fonction associée en éléments simples, calculer, lorsqu'elle converge, la somme des séries de terme général :

$$\frac{1}{n(n+1)}\ ;\ \frac{-2}{(2n+5)(2n+3)}\ ;\ \frac{1}{4n^2-1}\ ;\ \frac{-1}{9n^2+3n-2}\ ;\ \frac{1}{(n+2)\,(n+3)}$$