SUITES NUMERIQUES
Notes de Cours

Roger NOEL

30 août 2006

1 Notion de récurrence

La notion de récurrence a été introduite par *G. PEANO* (1858 - 1932) dans son exposé axiomatique de la théorie des nombres entiers ($\mathbb{N}$). L'un de ces axiomes, dit *axiome de récurrence*, est le fondement d'un grand nombre de démonstrations mettant en jeu des nombres entiers.

Les développements récents de l'informatique et donc du calcul automatisé ont redonné un regain de jeunesse à cet axiome, ... et à ses conséquences.

En effet, s'il est vrai que nombre de problèmes concrets sont continus (en ce sens qu'ils font intervenir des nombres réels), la machine quant à elle ne permet de manipuler que des notions discrètes (entières à une bijection près). Nous sommes donc amenés à utiliser dans tous les domaines des "approximations" de phénomènes continus par des phénomènes discrets, dans lesquels les entiers et la notion de récurrence sont des notions fondamentales.

Proposition 1 Axiome de récurrence

Si $\left\{\begin{array}{l} A \subset \mathbb{N} \\ 0 \in A \\ n \in A \Longrightarrow n+1 \in A \end{array}\right.$ *, alors* $A = \mathbb{N}$

Exemple 1

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

- Posons $u(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k,\ v(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ u(n) = v(n)\}$.
  Nous sommes alors ramenés à montrer que $A = \mathbb{N}$.
- $u(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{0} k = 0$ et $v(0) = 0$. Donc $0 \in A$
- Soit $n \in A$. Alors $u(n) = v(n)$ et

$$\begin{aligned} u(n+1) &= \sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1) \\ &= u(n) + (n+1) = v(n) + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

- Par ailleurs $v(n+1) = \dfrac{(n+1)(n+1+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$, d'où $u(n+1) = v(n+1)$, soit $n+1 \in A$.

- Par conséquent, d'après l'axiome de récurrence, $A = \mathbb{N}$

Remarque

Pour démontrer que $n \in A \Longrightarrow n+1 \in A$, nous avons commencé par considérer un élément n de A («soit $n \in A$») pour montrer qu'alors $n+1 \in A$. L'hypothèse «$n \in A$» que nous faisons alors est souvent appelée, improprement, *hypothèse de récurrence*, et souvent rédigée «supposons $n \in A$». Il est bien clair que nous ne supposons pas que, n étant un entier quelconque, il appartient à A (c'est en fait ce que nous voulons montrer !), mais bien uniquement que nous considérons un élément de A.

Exercice 1

Montrer que

- $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- Soit q un complexe différent de 1. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

2 Suites, généralités

Définition 1

- *Une suite est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ dont le domaine D est tel que :*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ / \ D_n = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq n_0\}$$

- *Ainsi, la relation $u_n = \dfrac{1}{n-2}$ définit une suite dont le domaine est l'ensemble des entiers supérieurs ou égaux à 3.*

Remarque

- Si u est une suite, il est d'usage de noter u_n l'image de n par u, i.e. $u(n)$, et de l'appeler *terme général* de la suite. La suite elle-même est notée u ou $(u_n)_{n \geq n_0}$
- Nous n'étudierons ici que les suites numériques, i.e. les suites sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 2

Déterminer le domaine de définition des suites suivantes :

$$u_n = \frac{\ln(n-2)}{n-5} \qquad v_n = \frac{1}{\ln(n-2)}$$

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$$

Définition 2 *Suite définie par récurrence*

Une suite numérique est entièrement définie par la donnée de son premier terme u_{n_0} et d'une relation de récurrence simple

$$u_{n+1} = f(n, u_n)\ \forall n \geq n_0$$

où f est une fonction de $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, à condition que $\forall n \geq n_0,\ (n, u_n) \in D_f$.

Remarque

- La suite notée $n!$ est définie par la relation de récurrence $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = (n+1)u_n$.
- La suite notée 2^n est définie par la relation de récurrence $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2\,u_n$.

Exemple 2

> *Soit u la suite définie par $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n+2}{u_n+3}$. Cette suite est-elle définie pour tout $n \geq 1$?*

Cette suite est effectivement définie (pour $n \geq 1$) par ces conditions si nous parvenons à montrer que $\forall n \geq 1,\ u_n \neq -3$.
Or il est clair que si u_n est positif, il en est de même de u_{n+1}, et comme u_1 est positif, tous les termes de la suite sont positifs et par conséquent différents de -3.

Exemple 3

> *Même question pour la suite u définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n-2}{u_n+3}$.*

La démonstration est beaucoup moins évidente dans ce cas. Il nous faut vérifier si $\forall n \geq 0,\ u_n \neq -3$.
Un calcul des 10 premiers termes de la suite montre un comportement peu régulier :
$u_1 = -0.250$; $u_2 = -0.818$; $u_3 = -1.29$; $u_4 = -1.93$; $u_5 = -3.66$; $u_6 = 8.59$
$u_7 = 0.568$; $u_8 = -0.401$ $u_9 = -0.924$; $u_{10} = -1.41$
(Les réponses sont données en valeurs approchées, mais les calculs ont été menés exactement). Nous sommes parfois amenés, dans ce genre de situation, à supposer la suite définie, sans pouvoir vraiment le démontrer !
Dans le cas présent, nous pouvons montrer, en posant $a = \dfrac{3-4i}{5}$, que $u_n = \dfrac{(1+i)a^n - 1 + i}{a^n - 1}$, ce qui montre que la suite u est définie si a^n est toujours différent de 1, ce qui nous mène à la condition $\dfrac{1}{\pi}\arctan\dfrac{4}{5} \notin \mathbb{Q}$, condition dont la résolution dépasse largement le cadre de ce cours, si ce n'est le cadre des mathématiques du XXI ème siècle ! (?).

Exercice 3

- Montrer que pour tout réel x strictement inférieur à 3 on a $\dfrac{9}{6-x} < 3$
- En déduire qu'il existe une suite u vérifiant $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{9}{6-u_n}$.

3 Sens de variation d'une suite

Les définitions et donc les propositions de ce paragraphe ne sont valables que pour les suites à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ n'étant pas muni d'une relation d'ordre.

Définition 3 *Une suite u est dite*

- croissante *si* $\forall n \geq n_0,\ n < p \Longrightarrow u_n \leq u_p$
- décroissante *si* $\forall n \geq n_0,\ n < p \Longrightarrow u_n \geq u_p$)
- strictement croissante *si* $\forall n \geq n_0,\ n < p \Longrightarrow u_n < u_p$
- strictement décroissante *si* $\forall n \geq n_0,\ n < p \Longrightarrow u_n > u_p$)
- monotone *si elle est croissante ou décroissante.*

Remarque

Il s'agit là en fait de la définition générale de la croissance (ou de la décroissance) d'une fonction. Dans le cas des suites, nous disposons d'un critère spécifique, plus facile à manipuler

Proposition 2 *une suite u est croissante (respectivement décroissante, strictement croissante, strictement décroissante) si et seulement si*

$$\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} - u_n \geq 0 \text{ (respectivement } \leq 0,\ > 0,\ < 0)$$

Remarque

Ce critère s'applique spécialement aux suites définies par récurrence. Il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n$ et d'en étudier le signe. Si le signe de cette expression n'est constant que pour $n \geq n_1 \geq n_0$, nous dirons que la suite est monotone à partir du **rang** n_1, ou plus simplement *à partir d'un certain rang.*

Dans le cas des suites définies par $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, nous utiliserons plutôt le théorème suivant :

Proposition 3 *Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et si f est monotone sur $[n_0, +\infty[$, alors la suite u est également monotone, de même sens de variation que f.*
La réciproque est fausse.

Exemple 4

Soit la suite numérique u définie par
$u_1 = \dfrac{1}{2}$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}.u_n$.
Montrer que la suite est décroissante.

Nous avons $u_{n+1} - u_n = \dfrac{n+1}{2n} u_n - u_n = \dfrac{1-n}{2n} u_n$.
Or, $\forall n > 1$, $\dfrac{1-n}{2n} < 0$..
Par conséquent si $u_n > 0$, $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite est décroissante, même strictement décroissante à partir du rang 2.

Montrons donc que $\forall n \geq 1,\ u_n > 0$: $u_1 > 0$ ($u_1 = \frac{1}{2}$) et $\forall n \geq 1$, $\dfrac{n+1}{2n} > 0$; donc $u_n > 0 \Longrightarrow u_{n+1} > 0$.

Par conséquent, d'après l'axiome de récurrence, $u_n > 0\ \forall n \geq 1$.

Exercice 4

On considère la suite u définie par $u_n = \dfrac{e^n + 2^n}{e^n - 2^n}$

- Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
- Démontrer que la suite u est décroissante .

4 Convergence

Définition 4 *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite numérique à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
On dit que (u_n), quand n tend vers $+\infty$,

- *tend vers $+\infty$ si* $\forall A > 0\ \exists n_1 \geq n_0\ /\ n \geq n_1 \Longrightarrow u_n > A$
- *tend vers $-\infty$ si*
  $ds\forall A > 0\ \exists n_1 \geq n_0\ /\ n \geq n_1 \Longrightarrow u_n < -A$
- *tend vers l ($l \in \mathbb{R}$) si* $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1 \geq n_0\ /\ n \geq n_1 \Longrightarrow |u_n - l| < \varepsilon$

La suite est dite convergente *si elle admet une limite finie.*

Définition 5 Suites complexes
Soit u une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$. Nous pouvons lui associer deux suites a et b à valeurs dans $\mathbb{R}$ définies par $a_n = \mathcal{R}\mathrm{e}\,(\mathrm{u_n})$ et $b_n = Im(u_n)$. Nous avons alors $u_n = a_n + \imath b_n$.
La suite u est dite convergente si et seulement si les suites a et b le sont, et alors on pose $\lim u_n = \lim a_n + \imath \lim b_n$.

Proposition 4 *Les théorèmes généraux concernant les limites de fonctions sont également applicables aux suites, (qu'elles soient à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), à savoir :*
- *la somme de deux suites convergentes est convergente, et sa limite est la somme des limites ;*
- *si la suite u converge vers l, alors pour tout réel λ la suite λu converge vers λl ;*
- *si les suites u et v convergent vers l_1 et l_2 respectivement, la suite $u \times v$ converge vers $l_1 l_2$ et si $l_2 \neq 0$, la suite u/v converge vers l_1/l_2.*

Proposition 5
- *Soit f une fonction numérique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u une suite à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
  Si u converge vers l et si f admet une limite en l, alors la suite $(f(u_n))$ est convergente et $\lim f(u_n) = \lim\limits_{x \to l} f(x)$.
- *Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite numérique définie par $u_n = f(n)$ où f est une fonction numérique. Alors*
  si f admet une limite en $+\infty$, il en est de même de la suite u, et ces limites sont les mêmes.
  La réciproque est fausse, i.e. que la suite peut admettre une limite sans que la fonction n'en admette une.

Remarque

Ce critère est évidemment utile pour déterminer la limite d'une suite lorsque l'on connait la limite de la fonction numérique associée, mais s'avère de plus quasi indispensable pour montrer qu'une fonction numérique n'admet pas de limite.

Exemple 5

Prenons pour exemple la fonction sinus. Nous avons toujours considéré, mais sans le démontrer, que cette fonction n'admet pas de limite, ni finie ni infinie, lorsque x tend vers $+\infty$. Montrons le maintenant.

Supposons que cette limite existe, et est égale à l (l fini ou infini). Soit u la suite définie par $u_n = \sin n\pi$. Alors $u_n = g(n)$ avec $g(x) = \sin \pi x$. Or quand x tend vers $+\infty$, πx tend également vers $+\infty$; donc $g(x)$ tend vers l et d'après la proposition précédente la suite u tend vers l. Or $u_n = 0$ pour tout n et tend donc vers 0. Ce qui montre que $l = 0$. Soit v la suite définie par $v_n = \sin(\pi/2 + 2n\pi)$. Alors $u_n = h(n)$ avec $h(x) = \sin(\pi/2 + 2\pi x)$.

Or quand x tend vers $+\infty$, $\pi/2 + 2\pi x$ tend également vers $+\infty$; donc $h(x)$ tend vers l et d'après la proposition précédente la suite v tend vers l.

Or $v_n = 1$ pour tout n et tend donc vers 1. Ce qui montre que $l = 1$ et nous aboutissons donc à une contradiction, ce qui prouve que f n'admet pas de limite.

Exercice 5

En vous inspirant de la démonstration précédente, montrer que toute fonction périodique non constante n'admet pas de limite en $+\infty$.

Définition 6 Suites bornées
Une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite
- majorée *si* $\exists M > 0 \ / \ \forall n \geq n_0,\ u_n \leq M$.
- minorée *si* $\exists m \in \mathbb{R} \ / \ \forall n \geq n_0,\ u_n \geq m$.
- bornée *si elle est à la fois minorée et majorée.*

On remarquera qu'une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ est bornée si et seulement si la suite $(|u_n|)$ est majorée, i.e. si

$$\exists M > 0 \ / \ \forall n \geq n_0,\ |u_n| \leq M$$

Proposition 6 *Toute suite croissante majorée (resp. décroissante minorée) est convergente.*

Remarquons que ce critère nous assure de la convergence, mais ne nous donne pas la limite. Son intérêt est cependant primordial car la limite, ou du moins une valeur approchée de cette limite, peut alors être déterminée par un calculateur.

Il existe cependant un cas important où nous savons déterminer la limite de la suite, après en avoir montré l'existence :

Proposition 7 *Si la suite numérique u est définie par son premier terme et par une relation de récurrence*

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

où f est une fonction continue, alors si la suite est convergente, sa limite l vérifie la relation $l = f(l)$.

Exercice 6
- On pose $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{-1}{3+u_n}$.
  Montrer que la suite u est décroissante minorée et déterminer sa limite.
- On pose $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.
  Montrer que la suite est croissante majorée et déterminer sa limite.

Proposition 8 Critère de comparaison

- *Soit u et v deux suites sur $\mathbb{R}$ telles que $\exists n_1 \geq 0 \ / \ u_n \leq v_n\ \forall n \geq b_1$. Alors*
  - *si u_n tend vers $+\infty$, v_n tend également vers $+\infty$*
  - *si v_n tend vers $-\infty$, u_n tend également vers $-\infty$*
- *Soit u, v et w trois suites sur $\mathbb{R}$ telles que $\exists n_1 \geq 0 \ / \ v_n \leq u_n \leq w_n\ \forall n \geq n_1$. Alors, si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite l, la suite (u_n) est également convergente, vers la même limite l (théorème des "gendarmes" ou du "sandwich").*

Exercice 7
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire les limites de I_n et de J_n quand n tend vers $+\infty$.
3. Etablir, à l'aide d'une intégration par parties, que $I_n = \dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} + \dfrac{1}{n+1} J_n$. Quelle est la limite de nI_n quand n tend vers $+\infty$?

5 Suites arithmétiques

Définition 7 *Une suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite* arithmétique *si*

$$\exists r \in R \ / \ \forall n \geq n_0, \ u_{n+1} - u_n = r$$

r est alors appelé raison *de la suite.*

En d'autres termes la suite u est arithmétique si la suite de terme général $u_{n+1} - u_n$ est constante. Remarquons par ailleurs qu'une suite constante est arithmétique, de raison 0.

Proposition 9

- *Une suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$ est arithmétique si et seulement si*

$$\exists (a,b) \in R^2 \ / \ \forall n \geq n_0, \ u_n = an + b$$

a est alors la raison de la suite.

- *Si u est arithmétique de raison r, alors*

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n_0} + (n - n_0)r \\ &= u_p + (n-p)r \end{aligned}$$

et ce pour tout n et tout p.

Proposition 10 *Sens de variation ...*
Une suite arithmétique de raison r est

- *croissante, de limite $+\infty$ si $r > 0$*
- *décroissante, de limite $-\infty$ si $r < 0$*
- *constante si r est nul*

Proposition 11 *Somme des termes ...*
Si u est une suite arithmétique de raison r, alors

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 \ (p < n), \ \sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_n + u_p}{2}$$

Remarquons que dans cette formule, $(n - p + 1)$ est le nombre de termes de la somme, $(u_n + u_p)/2$ étant la moyenne (arithmétique) du premier et du dernier terme de cette somme.

Exercice 8
On se propose de trouver une suite réelle vérifiant $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{-7u_n - 8}{2u_n + 1}$.

- On suppose que u existe.
  - Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \neq -2$.
  - Montrer que la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{2u_n+1}{u_n+2}$ est une suite arithmétique. Calculer u_n en fonction de n. On note $f(n)$ la suite ainsi obtenue.
- Montrer que la suite $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les conditions imposées à u. Conclure. Trouver la limite de la suite u.

6 Suites géométriques

Définition 8 *Une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ est dite* géométrique *si*

$$\exists q \in \mathbb{R}^* \;/\; \forall n \geq n_0,\ u_{n+1} = qu_n$$

q est alors appelé raison *de la suite.*

Remarquons par ailleurs qu'une suite constante est géométrique, de raison 1.

Proposition 12
- *Une suite numérique $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique si et seulement si*

$$\exists (a,b) \in \mathbb{R}^* \times R \;/\; \forall n \geq n_0,\ u_n = ba^n$$

  a est alors la raison de la suite.
- *Si u est géométrique de raison q, alors*

$$u_n = u_{n_0}q^{n-n_0} = u_p q^{n-p}$$

  et ce pour tout n et tout p.

Proposition 13 *Une suite géométrique u de raison q et de premier terme u_{n_0} est*
- *croissante si $q > 0$ et $u_{n_0}(q-1) > 0$*
- *décroissante si $q > 0$ et $u_{n_0}(q-1) < 0$*
- *non monotone si $q < 0$*
- *constante si $q = 1$*

Elle est
- *divergente si $q \leq -1$ (elle n'admet pas de limite)*
- *convergente vers 0 si $|q| < 1$*
- *convergente vers u_{n_0} si $q = 1$*
- *divergente si $q > 1$, vers $+\infty$ si $u_{n_0} > 0$, vers $-\infty$ si $u_{n_0} < 0$.*

Proposition 14 *Soit u une suite géométrique de raison q. Posons $S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k$.*
Alors, si $q \neq 1$,
$$S_n = u_{n_0}\frac{q^{n-n_0+1}-1}{q-1}$$
et si $q = 1$, $S_n = u_{n_0}(n - n_0 + 1)$.

Exercice 9

Une source sonore émet un son dont l'intensité est de 100 décibels. Une plaque d'isolation phonique absorbe 45% de l'intensité du son.

Déterminer le nombre minimal de plaques que doit traverser le son pour que son intensité soit inférieure ou égale à 20 décibels.

Exercice 10

Soit $u_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$ et $v_n = \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} \sin x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$

1. Montrer que u est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. Montrer que la suite converge et donner sa limite.
3. La suite v est-elle géométrique ?
4. Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$
   (a) Montrer, par récurrence sur n, que $S_n = \int_{0}^{(2n+1)\pi} \sin x\, e^{-x}\, \mathrm{d}x$
   (b) En déduire la valeur de S_n en fonction de n.

7 Suites arithmético-géométriques

Définition 9 *On appelle suite* arithmético-géométrique *toute suite définie par une relation de récurrence de la forme*

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Si $a = 1$ la suite est arithmétique, tandis qu'elle est géométrique pour $b = 0$.

Proposition 15 *Soit u une suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = au_n + b$. Si $a \neq 1$ et $a \neq 0$, la suite v définie par*

$$v_n = u_n - \frac{b}{1-a}$$

est géométrique de raison a.

Exercice 11

On emprunte une somme D, remboursable en N mensualités fixes m, au taux annuel τ.

- Déterminer le taux mensuel
- Déterminer m en fonction de D, N et τ.

Exercice 12

Pour acheter un appartement, un particulier contracte un emprunt de 100 000 euros remboursable en 10 ans par annuités égales, au taux de 6,5 %.

1. Calculer le montant de l'annuité
2. Une clause du contrat précise qu'en cas de revente de l'appartement, le capital restant dû doit être remboursé en totalité à l'échéance suivante. Quel est le montant du remboursement en supposant que la vente se produit au cours de la huitième année ?

8 Suites extraites

Définition 10 *Soit u une suite numérique et φ une application croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$.*
Alors $u \circ \varphi$ est une suite numérique dite suite extraite *de la suite u.*
Ainsi les suites v, w, t définies par
$v_n = u_{2n}$,
$w_n = u_{2n+1}$
$t_n = u_{3n+2}$
sont des suites extraites de la suite u.

Proposition 16
- *Toute suite extraite d'une suite admettant une limite (finie ou infinie) admet la même limite que la suite dont elle est extraite.*
- *Réciproquement la convergence d'une suite extraite n'assure pas la convergence de la suite.*

Exemple 6

|| *Montrer que la suite de terme général $(-1)^n$ n'admet pas de limite.*

- Ce résultat semble intuitivement évident : la suite vaut en effet alternativement 1 et -1, et ne se « rapproche » donc d'aucune valeur fixe. Reste à le démontrer.
- Considérons les deux suites extraites u_{2n} et u_{2n+1}. La première est constante égale à 1 et converge donc vers 1, la seconde est constante égale à -1 et converge donc vers -1.
- Or d'après la proposition précédente, si la suite u était convergente, ces deux suites extraites devraient avoir la même limite.

Exercice 13

- Soit u une suite numérique. Montrer que si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) admettent la même limite l, alors la suite u tend également vers l
- Soit (u_n) une suite numérique. On suppose les trois suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) convergentes.
  - Montrer que (u_{2n}) et (u_{3n}) admettent une suite extraite commune et en déduire qu'elles ont même limite.
  - Montrer que (u_{2n+1}) et (u_{3n}) admettent une suite extraite commune et en déduire qu'elles ont même limite.
  - En déduire, en utilisant le résultat de l'exercice précédent que la suite (u_n) est convergente.

9 Suites adjacentes

Définition 11 *Deux suites numériques u et v sont dites* adjacentes *si et seulement si*
- *u est croissante et v décroissante ;*
- *$(u - v)$ converge vers 0*

Proposition 17 *Deux suites adjacentes sont convergentes, vers la même limite.*

Exercice 14

Soit u et v les suites définies par $u_1 = 12$, $v_1 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3}$ et $v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4}$.

- On pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que la suite w est géométrique et en déduire w_n en fonction de n. Montrer que la suite w est convergente et déterminer sa limite.
- Montrer que les suites u et v sont adjacentes.
- On pose $t_n = 3u_n + 8v_n$. Montrer que la suite t est constante. En déduire les limites des suites u et v.

Exercice 15

Pour $n \in N^*$ on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

- Montrer que les suites (u_{2p}) et (u_{2p+1}) sont adjacentes. On notera l leur limite commune.
- Montrer que pour tout entier n non nul, le réel l est compris entre deux termes consécutifs u_n et u_{n+1} de la suite (u_n).
- Ecrire un programme en VB permettant, grâce à l'encadrement précédent, d'obtenir les deux premières décimales exactes du réel l.

Exercice 16

On note f la fonction de $]1;+\infty[$ dans R définie par $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

- Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative.
- Montrer que $\forall k \geq 3,\ f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leq f(k-1)$
- Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on pose $S_n = \sum_{k=2}^{n} f(k)$
  - Montrer que $\forall n \geq 2,\ S_n - \frac{1}{2\ln 2} \leq \int_{2}^{n} f(x)\,dx \leq S_n - \frac{1}{n\ln n}$
  - En déduire que $\forall n \geq 2$
  $$\ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \leq S_n \leq \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) + \frac{1}{2\ln 2}$$
  - Etablir qu'en $+\infty$ S_n est équivalent à $\ln(\ln n)$.
- Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 on note $u_n = S_n - \ln(\ln(n+1))$ et $v_n = S_n - \ln(\ln n)$.
  - En utilisant la résultat de la question 2, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes. On note l leur limite commune.
  - Montrer que $\forall n \geq 2,\ 0 \leq v_n - l \leq \frac{1}{n\ln n}$
  - En déduire une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

10 Exercices

Exercice 17

Une progression arithmétique a 10 termes. Le quatrième est 20 et le neuvième est 80.

1. Calculer la raison de la progression, son premier terme et la somme de ses termes.
2. On prolonge cette progression au-delà du dixième terme. Déterminer le premier terme qui dépasse 1 000

Exercice 18

1/ Montrer que pour tout réel x strictement inférieur à 3 on a $\frac{9}{6-x} < 3$

2/ En déduire qu'il existe une suite u vérifiant

$$\begin{cases} u_0 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n} \end{cases}$$

3/ Déterminer le sens de variation de la suite u. En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite.

4/ Soit v la suite réelle définie par

$$\forall n \in N,\ v_n = \frac{1}{u_n - 3}$$

Montrer que v est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme et la raison. Calculer v_n puis u_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite u.

Exercice 19

Soit la suite numérique u définie par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n}.u_n \end{cases}$$

1/ Calculer u_2, u_3 et u_4.

2/ Montrer que la suite est décroissante et minorée par 0. En déduire que la suite u converge et déterminer sa limite.

3/ Montrer que la suite v définie pour $n > 0$ par $v_n = \dfrac{u_n}{n}$ est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison. En déduire u_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite u.

Exercice 20

A tout entier naturel n on associe la solution u_n de l'équation $\ln(10^n u_n) = \dfrac{n}{2}$

1/ Montrer que u est une suite géométrique dont on déterminera les deux premiers termes et la raison. La suite u est-elle convergente ?

2/ Soit v la suite définie par $v_0 = u_0$ et $v_n = u_n.v_{n-1}$ pour tout entier $n \geq 1$. Calculer v_1 et v_2, et montrer que pour tout entier n

$$v_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

3/ Déterminer l'ensemble des entiers n tels que $v_n \leq 10^{-6}$

Exercice 21

On considère la suite u définie apr $u_0 = 1$, $u_1 = 3$ et la relation de récurrence

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}a^2 u_{n+1} + (a-3)u_n$$

a étant un réel donné.
Soit v la suite définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$.

1/ Soit $a = 2$. Verifier que la suite v est constante. En déduire que u est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme. Exprimer en fonction de n : u_n et $S_n = \sum i = 1^n\, u_i$. En déduire la somme des entiers naturels impairs inférieurs à 100.

2/ On pose maintenant $a = -4$. Vérifier que v est une suite géométrique et en déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

3/ Montrer que -4 est la seule valeur de a telle que la suite v soit une suite géométrique non constante.

Exercice 22

On considère la suite réelle u définie par la relation de récurrence $u_{n+2} = (a+1)u_{n+1} - au_n$ et la donnée de u_0 et de $u_1 = au_0$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4 puis u_n.
2. Soit
$$S_n(a, u_0) = \sum_{k=0}^{n} u_k$$
   (a) Déterminer pour quelles valeurs de a la suite S est convergente.

   (b) Déterminer u_0 en fonction de a pour que la limite de la suite S soit égale à 1. Calculer alors la limite de la suite T définie par $T_n = \sum_{k=1}^{n} k u_k$

Exercice 23

Soit f la fonction numérique définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer par récurrence sur n que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

Exercice 24

Formule de Taylor avec reste intégral

On se propose de démontrer le théorème suivant :
Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$ alors
$$\forall x \in [a, b],\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$
Soit donc $x \in [a, b]$ et f de classe $\mathcal{C}^\infty$ (i.e. indéfiniment dérivable). Nous démontrons alors la formule de Taylor pour tout entier n.

Posons
$$u_n = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$
$$v_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$
et
$$A = \{n \in \mathbb{N} \ / \ u_n = v_n\}$$
On rappelle que $f^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de f ($f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f$", etc ...) et que conventionnellement $f^{(0)} = f$.

1. Expliciter u_0 et v_0 et vérifier que $0 \in A$.
2. Expliciter u_1 et v_1. Intéger v_1 par parties (en dérivant le polynôme) et en déduire que $u_1 = v_1$
3. (a) Expliciter v_{n+1}. Intégrer par parties.

   (b) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a)$.

   (c) En déduire que $v_{n+1} - u_{n+1} = v_n - u_n$.

   (d) Conclure
4. Soit $f(x) = \sin x$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = \sin(x + n\dfrac{\pi}{2})$.

   (b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \cos n\pi = (-1)^n$.

   (c) En déduire que $f^{(2n)}(0) = 0$ et $f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$.

(d) Appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à la fonction $\sin x$, à l'ordre $(2n+1)$, pour $a = 0$.

(e) Montrer que $\left| \int_0^x \frac{(x-t)^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(t)\, dt \right| \leq \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$.

(f) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle $\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^n}{n!} \leq 10^{-11}$ (utiliser vos calculatrices !).

Soit n_1 cette valeur et $n_0 = E(\frac{n_1}{2})$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n_0} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ est une valeur approchée de $\sin x$ à 10^{-11} près, pour tout x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

(g) Soit $w_n = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Calculer $\frac{w_{n+1}}{w_n}$. En déduire que la suite (w_n) peut être définie par

$$\begin{cases} w_0 & = & x \\ w_{n+1} & = & w_n \dfrac{x^2}{2(n+1)(2n+3)} \end{cases}$$

5. Ecrire un programme permettant de calculer w_n pour x et n donnés par l'utilisateur. On utilisera la définition par récurrence précédente. Etendre le programme précédent au calcul d'une valeur approchée de $\sin x$.
6. Reprendre les questions précédents pour $f(x) = \cos x$.

Exercice 25

Soit la suite numérique (u_n) définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. (suite de Fibonacci)

1. Calculer les 10 premiers termes de cette suite.
2. Ecrire un programme permettant de calculer u_n pour n donné par l'utilisateur.
3. Soit E l'ensemble des suites u vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
   (a) Montrer qu'il existe deux suites géométriques $n \mapsto r^n$ appartenant à E. On notera r_1 et r_2 les deux valeurs de r répondant à la question (la valeur positive est le **nombre d'or** et sera notée r_2).
   (b) Montrer que pour tous réels a et b, la suite $v_n = ar_1^n + br_2^n$ est élément de E.
   (c) Déterminer a et b pour que la suite v vérifie les relations de définition de u. Conclure.
   (d) Etudier en fonction des valeurs de a et de b la limite de la suite $v_n = ar_1^n + br_2^n$.
   (e) On considère maintenant $b = 0$. Calculer v_0 et v_1. Ecrire un programme permettant de calculer v_n en utilisant la définition par récurrence de cette suite.
   On vérifiera en utilisant ce programme que v_n semble tendre vers l'infini.
   Expliquer cette contradiction.

Exercice 26

Suite de Babylone

On se propose de trouver une valeur approchée de $\sqrt{a}$ pour un réel positif a donné. Soit

$$f(x) = x^2 - a$$

1. Construire la courbe représentative de f.
2. Soit M_n le point de cette courbe d'abscisse u_n. Déterminer l'équation de la tangente à cette courbe en M_n. On appelle u_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de cette tangente et de l'axe Ox. Montrer que l'on obtient $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$. On pose $u_0 = a+1$. Montrer que si cette suite converge, elle converge vers $\sqrt{a}$.

3. Soit $v_n = u_n - \sqrt{a}$. Montrer que $v_{n+1} = \dfrac{v_n^2}{2(v_n + \sqrt{a})}$. En déduire que si $v_0 \geq 0$, alors $\forall n \in N,\ v_n \geq 0$.
4. Calculer $v_{n+1} - v_n$ et en déduire que cette suite est décroissante. En déduire la converge de la suite (v_n) et donc celle de (u_n).
5. Calculer, en utilisant vos calculatrices, les dix premier termes de la suite (u_n) pour $a = 2$.
6. Ecrire un programme C effectuant les calculs des termes de la suite (u_n) pour a donné par l'utilisateur, et ce jusqu'à ce que l'ordinateur ne fasse plus la différence entre deux termes consécutifs. Verifier (en faisant afficher n) que la convergence est très rapide.
7. On se propose de reprendre la méthode précédente pour déterminer une suite convergeant vers $\sqrt[3]{a}$. Considérer la fonction $f(x) = x^3 - a$. Montrer qu'en définissant u_{n+1} comme l'abscisse du point d'intersection de l'axe Ox et de la tangente à cette courbe au point d'abscisse u_n, on obtient $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}\left(2u_n + \dfrac{a}{u_n^2}\right)$. Vérifier que cette suite converge vers la racine cubique de a. Ecrire un programme C utilisant cette suite pour déterminer la racine cubique d'un réel a donné par l'utilisateur.

Exercice 27

1. Pour tout entier naturel n on note f_n la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \int_0^x e^{nt^2}\,dt - \int_x^1 e^{-nt^2}\,dt$$

   (a) Montrer que f_n est dérivable sur $[0,1]$.
   (b) Etudier le sens de variation de f_n.
2. Montrer qu'il existe un unique réel c_n de $[0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^{c_n} e^{nt^2}\,dt = \int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt$. Donner la valeur de c_0.
3. On considère la suite $(c_n)_{n\geq 0}$ des nombres définis à la question précédente ; montrer qu'elle est décroissante et qu'elle converge vers une limite l appartenant à $[0,1]$.
4. (a) Montrer que pour tout nombre réel r de $]0,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^r e^{nt^2}\,dt = +\infty$.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n on a $\displaystyle\int_{c_n}^1 e^{-nt^2}\,dt \leq 1$.
   (c) En déduire la valeur de l.

Exercice 28

Soit a un réel strictement positif. On désigne par f_a la fonction définie par $f_a(x) = x^a \ln x$.

1. Montrer que la fonction f_a est prolongeable par continuité en 0, et en déduire l'existence et le calcul de l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_0^1 x^a \ln x\ dx$.
2. Etudier les variations de la fonction φ définie par $\varphi(x) = 2\ln x + \dfrac{1}{x} - x$. En déduire que pour $0 < x < 1$ on a $0 < \dfrac{x\ln x}{x^2-1} < 1$.
3. Pour a réel strictement positif on définit la fonction g_a par $g_a(x) = \dfrac{x^a \ln x}{x^2-1}$. Déterminer le domaine de définition de g_a et montrer que la fonction est prolongeable par continuité en 0 et en 1.
4. On pose, pour tout entier naturel n, $J_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n+1}\ln x}{x^2-1}\,dx$.

(a) Montrer que la fonction g_a est intégrable sur le segment $[0,1]$.

(b) Déduire de la question 1/ le calcul de $J_{n+1} - J_n$ et montrer que la suite (J_n) est convergente.

(c) Déduire de la question 2/ une majoration de J_n et montrer que $\lim\limits_{n\to 0} J_n = 0$.

5. En calculant $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (J_k - J_{k-1})$ démontrer que $J_0 = \dfrac{1}{4} \lim\limits_{n\to 0} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice 29

On considère la fonction f définie par $f(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$.

1. (a) Dresser le tableau des variations de f.
   (b) la fonction f est-elle dérivable en 0 ?
   (c) Tracer la courbe représentative de f (repère orthonormé, unité 5cm) (Cette courbe admet un point d'inflexion qu'on ne cherchera pas à déterminer)
2. (a) Montrer que l'image par f du segment $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ est le segment $\left[0; \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$.
   (b) On définit la fonction φ de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ dans $\left[0; \sqrt{\frac{2}{e}}\right]$ par $\varphi(x) = 2\sqrt{x}e^{-x}$. Démontrer que φ admet une fonction réciproque que l'on notera g.
   (c) Dresser le tableau des variations de g.
   (d) Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle ouvert $\left]0; \sqrt{\frac{2}{e}}\right[$.
   (e) La fonction g est-elle dérivable en 0 ? en $\sqrt{\frac{2}{e}}$?
3. (a) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que l'équation d'inconnue x $\varphi(x) = \frac{1}{n}$ admet une solution unique dans le segment $[0; \frac{1}{2}]$. On notera a_n cette solution.
   (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ converge vers 0.

Exercice 30

Soit u la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 & = & -2 \\ u_{n+1} & = & \dfrac{2}{3}u_n - 1 \end{cases}$$

1/ Déterminer u_n en fonction de n. En déduire $\lim u_n$

2/ Soit

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Déterminer S_n en fonction de n et en déduire lim S_n